ABC or (ABC) est globalement invariant par h car il contient G on a $h(S\cap P)=h(S)\cap h(P)=S'\cap P$ d'où

$S'\cap P=h\left(\zeta_{(ABC)}\right)$ est le cercle de centre h(H)=H(G)=G et de rayon $4r=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Exercice N°10

Soit ABCDEFGH un cube d'arrête AB=1et I=A*D. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).
   b) Calculer le volume v du tétraèdre BIGE, en déduire le volume v' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.
2) Soit S la sphère de centre E et de rayon 1 et $S'=t_{\overrightarrow{AC}}(S)$.
   a) Montrer que S est tangente au plan (BIG) au point $O\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.
   b) Montrer que S' coupe (BIG) suivant un cercle (C') dont-on précisera le centre et le rayon.
   c) Montrer que (OB) est tangente à (C') en O.
3) Soit Δ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}$. Vérifier que G appartient à Δ et que Δ est une droite parallèle à (OB).

Exercice N°10 1)a) B(1,0,0), D(0,1,0), $I=A*D\Rightarrow I\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$ et G(1,1,1) $\Rightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix};\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$et\ \overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}$ vecteur normal à (BIG) donc (BIG) : $\dfrac{1}{2}x+y-z+d=0\ or\ B\in P$ donc

$\dfrac{1}{2}+0-0+d=0\Rightarrow d=-\dfrac{1}{2}$ d'où

(BIG) : $\dfrac{1}{2}x+y-z-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow (BIG): x+2y-2z-1=0$.

b) $v=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\right)\overrightarrow{BE}\right|}{6}$ or E(0,0,1) $\Rightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\left(\overrightarrow{BI}\wedge\overrightarrow{BG}\right)\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\times(-1)+0\times1+1\times(-1)=\dfrac{-3}{2}$ donc $v=\dfrac{1}{4}$ unité de volume

or h de rapport $-\dfrac{2}{3}$ donc $v'=\left|\dfrac{-2}{3}\right|^3 v=\dfrac{2}{27}$ unité de volume.

2) a) $d(E,(BIG))=\dfrac{|0+0-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$ donc S est tangente au plan (BIG) or $O\in(BIG)$ car $\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}-1=0$

on a $OE=\sqrt{\left(0-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=1$ $donc\ O\in S$; enfin S est tangente au plan (BIG) au point O.

b) On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ donc $t_{\overrightarrow{AC}}(E)=G;\ t_{\overrightarrow{AC}}(S)$ est la sphère de centre G et de même rayon que S d'où S' est la sphère de centre G et de rayon 1. $d(G,(BIG))=0$ car $G\in(BIG)$ alors $S'\cap(BIG)$ est le cercle (C') de centre G et de rayon 1 (rayon de S').

c) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{-1}{3}\end{pmatrix},\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}=0$ donc $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OG}$ or $O\in(C')$ car $GO=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=1$

donc (OB) est tangente à (C') en O.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...